Title	BMOにおけるL$^ \infty$の一側面(Martingaleとその周辺)
Author(s)	風巻, 紀彦
Citation	数理解析研究所講究録 (1987), 627: 102-110
Issue Date	1987-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/99984
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
627巻 1987年 102-110

BMOにおけるL^∞の一側面

富山大・理　風巻紀彦 (Norihiko Kazamaki)

$(\Omega, \mathcal{F}, P : (\mathcal{F}_t))$ を通常の条件をみたす確率系とし，$(\mathcal{F}_t)$ に関する martingale の sample continuity を仮定する。次に，M を martingale，λ を実数とし

$$Z_t^{(\lambda)} = \exp(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t) \quad (0 \leq t < \infty)$$

とおく。簡単のため，$Z^{(1)}$ を Z で表すことにする。特に，M が uniformly integrable の場合，$1 \leq p < \infty$ に対し

$$\|M\|_{BMO_p} = \sup_T \| E[|M_\infty - M_T|^p | \mathcal{F}_T]^{1/p} \|_\infty$$

とおく。ここで，T は stopping time である。これが有限のとき，M を BMO-martingale といい，その全体は BMO で表される。周知のように，$\|M\|_{BMO_p}$ は BMO 上の equiv. norms をなしている。定義より $\|M\|_{BMO_1} \leq 2\|M\|_\infty$ だから，$L^\infty \subset BMO$ となる。しかも，trivial case を除き，L^∞ は BMO において dense でもないし closed でもない (Dellacherie-Meyer-Yor [1])。

本稿では，L^∞ と逆 Hölder 不等式の関連について述べる。

逆Hölder不等式とは.

$(R_p)\qquad \exists C_p>0,\ \forall T,\ E[Z_\infty^p \mid \mathcal{F}_T] \leq C_p Z_T^p$

のことで，特に $E[Z_\infty]=1$ のとき，次の関係が成立している：

$$M \in BMO \iff \exists p>1,\ Z \in (R_p)$$

なお，$M\in BMO$ から，$E[Z_\infty]=1$ が簡単に出る。以下，この条件を仮定して話を進めよう。

先ず，M を unif. integ. martingale とし

$$a(M) = \sup\{\alpha>0 : \exists C_\alpha>0,\ \forall T,\ E[\exp\{\alpha|M_\infty - M_T|\}\mid \mathcal{F}_T] \leq C_\alpha\}$$

とおく。従って，"$M\in BMO \iff a(M)>0$" である。

次に，$1\leq p<\infty$ に対し，$d_p(M,N) = \|M-N\|_{BMO_p}$ $(M,N\in BMO)$ とする。このとき：

<u>補題1</u> (Emery [2])

$$\frac{1}{4\,d_1(M,L^\infty)} \leq a(M) \leq \frac{4}{d_1(M,L^\infty)} \qquad (M\in BMO)$$

従って，"$M\in \overline{L^\infty} \iff a(M)=\infty$" である。

<u>定理1</u> $\quad M\in\overline{L^\infty} \iff (\forall\lambda\in\mathbb{R})\ Z^{(\lambda)} \in \bigcap_{p>1} (R_p)$

$\because$

$\longrightarrow$: 仮定により $a(M)=\infty$。従って，任意の $\lambda\in\mathbb{R}$，$p>1$ に対し

$$E[Z_\infty^{(\lambda)p} \mid \mathcal{F}_T] = Z_T^{(\lambda)p} E\left[\left\{\frac{Z_\infty^{(\lambda)}}{Z_T^{(\lambda)}}\right\}^p \,\middle|\, \mathcal{F}_T\right]$$

$$\leq Z_T^{(\lambda)p} E[\exp\{|\lambda| p\, |M_\infty - M_T|\} \,|\, \mathcal{F}_T]$$

$$\leq C_{\lambda,p} Z_T^{(\lambda)p}$$

i.e., $Z^{(\lambda)} \in (R_p)$

$\longleftarrow$: $M \in BMO$ だから

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \exists C_0 > 0 : \forall T,\ E[\exp\{\tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T)\} \,|\, \mathcal{F}_T] \leq C_0$$

次に，任意の $\alpha > 0$ に対し，$\varepsilon > 0$ を $\varepsilon < \min\{2\alpha, \frac{\varepsilon_0}{2\alpha}\}$ とし，$p = \frac{2\alpha}{\varepsilon}$ とおくと，$1 < p < \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon^2}$ となる。Schwarz's ineq. を用いて，

$$E[\exp\{\alpha(M_\infty - M_T)\} \,|\, \mathcal{F}_T] = E[\exp\{\alpha(M_\infty - M_T) - \frac{\varepsilon_0}{4}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T)\}$$

$$\times \exp\{\frac{\varepsilon_0}{4}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T)\} \,|\, \mathcal{F}_T]$$

$$\leq E[\exp\{2\alpha(M_\infty - M_T) - \frac{\varepsilon_0}{2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T)\} \,|\, \mathcal{F}_T]^{1/2}$$

$$\times E[\exp\{\frac{\varepsilon_0}{2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T)\} \,|\, \mathcal{F}_T]^{1/2}$$

$$\leq C_0^{1/2} E[\exp\{\frac{2\alpha}{\varepsilon}(\varepsilon M_\infty - \varepsilon M_T) - \frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon^2}(\langle \varepsilon M\rangle_\infty - \langle \varepsilon M\rangle_T)\} \,|\, \mathcal{F}_T]^{1/2}$$

$$\leq C_0^{1/2} E[\{\frac{Z_\infty^{(\varepsilon)}}{Z_T^{(\varepsilon)}}\}^p \,|\, \mathcal{F}_T]^{1/2}$$

$$\leq C_{\alpha,\varepsilon}.$$

同様の計算により，$E[\exp\{-\alpha(M_\infty - M_T)\} \,|\, \mathcal{F}_T] \leq C_0^{1/2} E[\{\frac{Z_\infty^{(-\varepsilon)}}{Z_T^{(-\varepsilon)}}\}^p \,|\, \mathcal{F}_T]^{1/2}$ を得る。従って

$$\forall \lambda > 0,\ \exists C_\alpha > 0 : \forall T,\ E[\exp\{\alpha |M_\infty - M_T|\} \,|\, \mathcal{F}_T] \leq C_\alpha$$

つまり，$a(M) = \infty$。このとき，補題1より，$M \in \overline{L^\infty}$ $\square$

<u>注意1</u>. 上記証明より，実際は次の成立が分る：

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \lambda\ (|\lambda| < \delta),\ Z^{(\lambda)} \in \bigcap_{p>1} (R_p) \implies M \in \overline{L^\infty}$$

注意2　$\forall \lambda > 0,\ Z^{(\lambda)} \in \bigcap_{p>1} (R_p) \not\Longrightarrow M \in \overline{L^\infty}$.

さらに，$Z, Z^{(-1)} \in \bigcap_{p>1} (R_p) \not\Longrightarrow M \in \overline{L^\infty}$。以下に，これを例証する。

$B = (B_t, \mathcal{F}_t)$ を 1-dim. Brownian Motion on $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$，$B_0 = 0$，とし，$\tau = \inf\{t : |B_t| = 1\}$ とおく。このとき，$E_Q[\exp(\frac{\pi^2}{8}\tau)] = \infty$（[4]）（ただし，$E_Q$ は Q に関する平均）。次に，$dP = \exp(B_\tau - \frac{\tau}{2})dQ$ とおくと，明らかに P は確率測度である。ここで Girsanov の変換 $M = 2B^\tau - 2\langle B^\tau \rangle$ を考えよう。M は BMO-martingale/P で $\langle M \rangle = 4\langle B^\tau \rangle$ である（[5]）。条件付平均の定義により，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$，$p > 1$ に対し

$$\begin{aligned} E\left[\left\{\frac{Z_\infty^{(\lambda)}}{Z_T^{(\lambda)}}\right\}^p \middle| \mathcal{F}_T\right] &= E_Q\Big[\exp\left\{(B_\tau - B_{\tau\wedge T}) - \tfrac{1}{2}(\tau - \tau\wedge T)\right\} \\ &\qquad \times \exp\left\{p\lambda(M_\infty - M_T) - \tfrac{p}{2}\lambda^2(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T)\right\} \Big| \mathcal{F}_T\Big] \\ &= E_Q\Big[\exp\left\{(1+2p\lambda)(B_\tau - B_{\tau\wedge T})\right\} \\ &\qquad \times \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(4p\lambda^2 + 4p\lambda + 1)(\tau - \tau\wedge T)\right\} \Big| \mathcal{F}_T\Big] \end{aligned}$$

従って，$4p\lambda^2 + 4p\lambda + 1 \geq 0$（i.e., $|\lambda + \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2\sqrt{q}}$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$）ならば

$$E\left[\left\{\frac{Z_\infty^{(\lambda)}}{Z_T^{(\lambda)}}\right\}^p \middle| \mathcal{F}_T\right] \leq \exp\{2(1 + 2p|\lambda|)\}.$$

例えば，$\lambda > 0$ 又は $\lambda \leq -1$ のとき，$Z^{(\lambda)} \in \bigcap_{p>1}(R_p)$。特に $Z, Z^{(-1)}$ はすべての (R_p) 条件をみたしている。

他方，$-1 < \lambda < 0$ のとき，$p_\lambda = \dfrac{1 + \pi^2/4}{1 - (2\lambda+1)^2}$ とおけば，$p_\lambda > 1$ で $-\frac{1}{2}(4p_\lambda\lambda^2 + 4p_\lambda\lambda + 1) = \frac{\pi^2}{8}$ となるから，

$$E[\{Z_\infty^{(\lambda)}\}^{p_\lambda}] \geqslant \exp\{-(1+2p)\}\cdot E_Q[\exp(\frac{\pi^2}{8}\tau)] = \infty .$$

つまり，$-1<\lambda<0$ のとき，$Z^{(\lambda)}$ は，(R_{p_λ}) 条件をみたさない。従って，定理1により $M \notin \overline{L^\infty}$。実際に，少し計算すると

$$d_1(M, L^\infty) \geqslant \frac{4}{4+\pi^2}$$

が得られる。

さて，次に，Z に対する (R_p) 条件が $\mathrm{dist.}(M, L^\infty)$ に依存することを述べよう。先ず

$$\Phi(p) = \left\{1 + \frac{1}{p^2}\log\frac{2p-1}{2(p-1)}\right\}^{1/2} - 1 \qquad (1<p<\infty)$$

とおく。明らかに，Φ は conti. decreas. 付で，$\Phi(1+0)=\infty$，$\Phi(\infty)=0$.

<u>補題2</u>　$\|M\|_{BMO_2} < \Phi(p) \Longrightarrow Z \in (R_p)$.

$\because$

本質的には，Emery's idea ([3]) に従って示す。便宜上

$$n(M) = 2\|M\|_{BMO_1} + \|M\|_{BMO_2}^2$$

とおく。このとき

$$n(M) \leqslant (\|M\|_{BMO_2}+1)^2 - 1 < \frac{1}{p^2}\log\frac{2p-1}{2(p-1)} \qquad \text{i.e., } 0 < \frac{2(p-1)}{2p-1}e^{p^2 n(M)} < 1.$$

$K_{p,M} = 2\Big/\left\{1 - \frac{2(p-1)}{2p-1}e^{p^2 n(M)}\right\}$ とおき，先ず

$$(*) \qquad E[Z_\infty^p] \leqslant K_{p,M}$$

を示す。

$n(M^T) \leqslant n(M)$ だから $K_{p,M^T} \leqslant K_{p,M}$。従って，あらかじめ Z を有

界と仮定できる。次に、$\delta = \exp\{-p\,n(M)\}$ とおくと、任意の stopping time T に対し

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{Z_\infty}{Z_T} < \delta \,\middle|\, \mathcal{G}_T\right) &= P\left(\frac{1}{\delta} < \frac{Z_T}{Z_\infty} \,\middle|\, \mathcal{G}_T\right) \\
&= P\left(\log\frac{1}{\delta} < -(M_\infty - M_T) + \frac{1}{2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T) \,\middle|\, \mathcal{G}_T\right) \\
&\leqslant \frac{1}{p\,n(M)} E[\,|M_\infty - M_T| + \frac{1}{2}(\langle M\rangle_\infty - \langle M\rangle_T) \mid \mathcal{G}_T] \\
&\leqslant \frac{1}{2p\,n(M)} \cdot n(M) = \frac{1}{2p}
\end{aligned}$$

i.e., $$P\left(\frac{Z_\infty}{Z_T} \geqslant \delta \,\middle|\, \mathcal{G}_T\right) \geqslant 1 - \frac{1}{2p}$$

いま $\lambda > 1$ を任意にとり、$T = \inf\{t : Z_t > \lambda\}$ とおく。このとき、$Z_T = \lambda$ on $\{T < \infty\}$ だから

$$P(Z_\infty \geqslant \delta\lambda \mid \mathcal{G}_T) \geqslant \left(1 - \frac{1}{2p}\right) I_{\{T<\infty\}}.$$

$\{Z_\infty > \lambda\} \subset \{T < \infty\}$ に注意すれば、

$$\begin{aligned}
E[Z_\infty : Z_\infty > \lambda] &\leqslant E[Z_\infty : T < \infty] \\
&\leqslant E[Z_T : T < \infty] \\
&\leqslant \lambda P(T < \infty) \\
&\leqslant \frac{2p}{2p-1} \lambda P(Z_\infty \geqslant \delta\lambda).
\end{aligned}$$

両端辺に、$(p-1)\lambda^{p-2}$ を掛けて λ に関して区間 $[1, \infty)$ 上で積分すると、

$$E[Z_\infty (Z_\infty^{p-1} - 1) : Z_\infty > 1] \leqslant \frac{2p}{2p-1} \cdot \frac{p-1}{p} E\left[\left(\frac{Z_\infty}{\delta}\right)^p - 1 : Z_\infty > \delta\right]$$

$\delta = e^{-p\,n(M)}$ だから

$$E[Z_\infty^p : Z_\infty > 1] \leqslant \left\{1 + \frac{2(p-1)}{2p-1} e^{p^2 n(M)}\right\} \Big/ \left\{1 - \frac{2(p-1)}{2p-1} e^{p^2 n(M)}\right\}$$

これを整頓すると (*) がある。

次に T を fix し, $A \in \mathcal{F}_T$, $P(A) > 0$ とし

$$M'_t = M_{T+t} - M_T,\quad \mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_{T+t},\quad P'(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

とおくと, M' は $(\mathcal{F}'_t)$-martingale $/ P'$, $\langle M'\rangle_t = \langle M\rangle_{T+t} - \langle M\rangle_T$,

従って, $\|M'\|_{BMO_2(P')} \leq \|M\|_{BMO_2}$, $\exp(M'_t - \frac{1}{2}\langle M'\rangle_t) = Z_{T+t}/Z_T$,

$K_{p,M'} \leq K_{p,M}$ となる。このとき (*) より

$$E'\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_T}\right)^p\right] \leq K_{p,M} \quad \text{i.e.,}\quad E\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_T}\right)^p : A\right] \leq K_{p,M} P(A).$$

換言すれば, $E[Z_\infty^p \mid \mathcal{F}_T] \leq K_{p,M} Z_T^p$ $\square$

定数 $K > 0$ に対し. $L^\infty_K = \{M : |M| \leq K\}$ とおく。このとき:

<u>定理 2</u> $1 < p < \infty$ に対し.

$$d_2(M, L^\infty_K) < e^{-K}\Phi(p) \Longrightarrow Z \in (R_p)$$

$\because$

仮定により, $\exists N \in L^\infty_K : \|M - N\|_{BMO_2} < e^{-K}\Phi(p)$。簡単のため $X = M - N$ とおく。測度の変換 $d\hat{P} = \exp(N_\infty - \frac{1}{2}\langle N\rangle_\infty)\,dP$ を施すことにより, $\hat{X} \equiv X - \langle X, N\rangle$ は martingale $/ \hat{P}$ で $\langle \hat{X}\rangle = \langle X\rangle$ となる。$\hat{X}$ に対応する exponential martingale $/ \hat{P}$ を都合により $\mathcal{E}(\hat{X})$ で表すと

$$Z = \exp(N - \tfrac{1}{2}\langle N\rangle)\cdot \mathcal{E}(\hat{X}).$$

がなりたつ。このとき.

$$E\left[\left(\frac{Z_\infty}{Z_T}\right)^p \Big| \mathcal{F}_T\right] = E\Big[\exp\Big\{(p-1)\big[(N_\infty - N_T) - \frac{1}{2}(\langle N\rangle_\infty - \langle N\rangle_T)\big]\Big\}$$

$$\times \left\{\frac{\mathcal{E}(\hat{X})_\infty}{\mathcal{E}(\hat{X})_T}\right\}^p \cdot \exp\Big\{(N_\infty - N_T) - \frac{1}{2}(\langle N\rangle_\infty - \langle N\rangle_T)\Big\} \Big| \mathcal{F}_T\Big]$$

$$\leq e^{2(p-1)K}\, \hat{E}\left[\left\{\frac{\mathcal{E}(\hat{X})_\infty}{\mathcal{E}(\hat{X})_T}\right\}^p \Big| \mathcal{F}_T\right]$$

ところで,

$$\hat{E}[\langle\hat{X}\rangle_\infty - \langle\hat{X}\rangle_T \mid \mathcal{F}_T] = E\Big[(\langle X\rangle_\infty - \langle X\rangle_T)\exp\Big\{(N_\infty - N_T) - \frac{1}{2}(\langle N\rangle_\infty - \langle N\rangle_T)\Big\}\Big|\mathcal{F}_T\Big]$$

$$\leq e^{2K} E[\langle M-N\rangle_\infty - \langle M-N\rangle_T \mid \mathcal{F}_T]$$

$$\leq e^{2K}\|M-N\|^2_{BMO_2} < \Phi(p)^2$$

$$\text{i.e.,} \quad \|\hat{X}\|_{BMO_2(\hat{P})} < \Phi(p)$$

従って, 補題 2 により, $\mathcal{E}(\hat{X}) \in (R_p)$ 。 つまり, $Z \in (R_p)$. $\square$

<u>注意 3</u> 条件 (i) $\langle M-N, N\rangle = 0$ (ii) $\|M-N\|_{BMO_2} < \Phi(p)$ をみたす $N \in \overline{L^\infty}$ が存在するとき, $Z \in (R_p)$ である。 これは, 条件 (i) から, $Z = \exp(N - \frac{1}{2}\langle N\rangle)\cdot\exp(M-N-\frac{1}{2}\langle M-N\rangle)$ がなりたつことに注意し, 定理 1, 定理 2 を適用すれば比較的簡単に証明できる。

参考文献

[1] C. Dellacherie, P.A. Meyer and M. Yor, Sur certaines propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO, Sém. Prob. XII Lecture Notes in Math. 649 (1978), 98-113

[2] M. Emery, Le théorème de Garnett-Jones d'après Varopoulos, Sém. Prob. XV, Lecture Notes in Math. 850 (1981), 278-284.

[3] M. Emery, Une définition faible de BMO, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 21-1 (1985), 59-71.

[4] K. Ito and H. P. Mckean, Jr, Diffusion processes and their sample paths, Springer-Verlag, New York, 1964

[5] N. Kazamaki, Martingale の理論, Seminar on Probability, vol. 51, 1981.